

1/ Convergence d'une série

a/ Définition: Soit (U_n) suite et $S_n = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$ la somme partielle. Si la suite (S_n) converge vers l , on dit que la série de terme général U_n , notée $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est convergente vers l et on note $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = l$ ($\sum_{n=0}^{+\infty} U_n = l$)

Remarque: Si la suite (S_n) diverge alors $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ diverge:

Exemple 1: $U_n = n$; $S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$ donc la série $\sum_{n=0}^{+\infty} U_n$ est divergente

Exemple 2: Série géométrique; c'est 1 série de t.g $U_n = a^n$
 $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n$ c.v $\Leftrightarrow -1 < a < 1$; $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$

En général: $\sum_{n=p}^{+\infty} a^n$ c.v $\Leftrightarrow -1 < a < 1$; $\sum_{n=p}^{+\infty} a^n = \frac{a^p}{1-a}$

b/ Remarque: la nature de la série reste inchangée, si on supprime un nombre fini de termes

2/ Propriétésa/ Condition nécessaire de convergence

Theoreme: Si $\sum U_n$ converge alors $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$

Conséquence: Si $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n \neq 0$ alors $\sum U_n$ diverge

Remarque: la réciproque du th n'est pas vraie

Exemple: $U_n = \frac{1}{n}$; $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = 0$ mais $\sum U_n$ diverge

b/ Linéarité

Theoreme: Si $\sum U_n$ et $\sum V_n$ convergent alors $\forall a, b \in \mathbb{R}$
 $\sum_{n=0}^{+\infty} (aU_n + bV_n)$ c.v et $\sum_{n=0}^{+\infty} (aU_n + bV_n) = a \sum_{n=0}^{+\infty} U_n + b \sum_{n=0}^{+\infty} V_n$

c/ Condition de Cauchy

$$\sum U_n \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n) \text{ converge} \Leftrightarrow (S_n) \text{ suite de Cauchy} \\ \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n > n_0 : |S_m - S_n| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m > n > n_0 : |U_{n+1} + U_{n+2} + \dots + U_m| < \varepsilon$$

Application : la série dite série harmonique $\sum \frac{1}{n}$ diverge

$$\text{En effet : } S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n} \geq \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

3/ Séries à termes positifs

a/ Définition et Remarque

- la série $\sum U_n$ est une série à t.p si $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \geq 0$
- la suite (S_n) est croissante ($S_{n+1} - S_n = U_{n+1} > 0$)

b/ Proposition : Si $\sum U_n$ est une série à t.p alors

$$\sum U_n \text{ c.v} \Leftrightarrow (S_n) \text{ majorée} ; \sum U_n \text{ div} \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$$

c/ Critère de Comparaison : si $0 \leq U_n \leq V_n$ et si

$$\sum V_n \text{ converge alors } \sum U_n \text{ converge}$$

$$\sum U_n \text{ diverge alors } \sum V_n \text{ diverge}$$

d/ Critère de l'équivalence : $U_n > 0, V_n > 0$

Déf : 2 suites (U_n) et (V_n) sont équivalentes, et on

$$\text{note } U_n \sim V_n \text{ si } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{U_n}{V_n} = 1$$

Th : Si $U_n \sim V_n$ alors $\sum U_n$ et $\sum V_n$ sont de même nature

Corollaire : soit $U_n > 0$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha U_n = \ell \neq 0, \alpha \in \mathbb{R}$

Si $\alpha > 1$ alors $\sum U_n$ converge (même chose si $\ell = 0$)

Si $\alpha \leq 1$ alors $\sum U_n$ diverge (même chose si $\ell = +\infty$)

2/ Série et Intégrale généralisée

(2)

Theoreme: Soit f une fonction continue, positive, décroissante sur $[1, +\infty[$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et soit la suite $U_n = f(n)$ alors la série $\sum_{n=1}^{+\infty} U_n$ et l'intégrale généralisée $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ sont de même nature.

Application: Série de Riemann ($\alpha \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge } \Leftrightarrow \alpha > 1 ; \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} \text{ diverge } \Leftrightarrow \alpha \leq 1$$

f/ Critère de Cauchy : $U_n > 0$; On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = l$

- Si $l < 1$ alors la série $\sum U_n$ c.v
- Si $l > 1$ alors la série $\sum U_n$ div
- Si $l = 1$ on ne peut pas conclure

g/ Critère de D'Alembert : $U_n > 0$; On pose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = l$

- Si $l < 1$ alors la série $\sum U_n$ c.v
- Si $l > 1$ alors la série $\sum U_n$ div
- Si $l = 1$ on ne peut pas conclure

4/ Série absolument convergente (A.C)

a/ Définition: la série $\sum U_n$ est dite A.C si la série :

$$\sum |U_n| \text{ est convergente}$$

b/ Theoreme: Si $\sum U_n$ est A.C alors $\sum U_n$ est c.v
(c-à-d si $\sum |U_n|$ c.v alors $\sum U_n$ c.v)

c/ Remarque: la réciproque du theoreme n'est pas vraie

Exemple: $U_n = \frac{(-1)^n}{n}$; $\sum |U_n| = \sum \frac{1}{n}$ div mais $\sum U_n$ c.v

5/ Série alternée

a/ Définition: Toute série de la forme $\sum_{n \geq 0} (-1)^n U_n$; ou $U_n > 0$

b/ Critère de convergence : Si la suite $(U_n)_{n \geq 0}$ est décroissante

et si $\lim u_n = 0$ alors la série $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n$ est convergente
Exemple : la série harmonique alternée : $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergent
6/ Règle D'Abel

Théorème : Soient (a_n) et (b_n) 2 suites et $s_n = \sum_{k=0}^n b_k$
Si les 3 conditions suivantes sont vérifiées
a/ $\sum_{n \geq 0} |a_{n+1} - a_n|$ converge b/ $\lim a_n = 0$ c/ (s_n) suite bornée

alors la série $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ est convergente

Corollaire 1 : Si (a_n) suite décroissante avec $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
et (b_n) suite telle que $\sum_{k=0}^n |b_k|$ est bornée alors la série
 $\sum a_n b_n$ est convergente

7/ Théorème de condensation de Cauchy

Théorème : (a_n) suite décroissante positive alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} 2^n a_{2^n} \text{ converge}$$

Application : la série $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ est convergente

8/ Comparaison par passage à la limite

Théorème : $a_n > 0$; $b_n > 0$ posons $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = l$

si $l \neq 0$ alors $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont de même nature

si $l = 0$ alors si $\sum b_n$ c.v alors $\sum a_n$ c.v

si $l = \infty$ alors si $\sum a_n$ c.v alors $\sum b_n$ c.v



ETU UP.com

Programmmation
Cours
Electricité
Physique
Résumés
Analyse
Livres
Exercices
Contrôles Continus
Langues
Thermodynamique
Multimedia
Divers
Economie
Travaux Dirigés
Chimie Organique
Informatique
Optique
Chimie
Algèbre
Corrigés
Mathématiques
Mécanique
Travaux Pratiques
Droit

et encore plus..